

# MATEMÁTICA

## ÍNDICE

GEOMETRIA ANALÍTICA – PARTE 1 .....	445
1. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL .....	445
2. ESTUDO DO PONTO .....	445
3. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA .....	445
4. ESTUDO DA RETA .....	445
5. CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR E DA EQUAÇÃO DA RETA .....	446
6. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO CARTESIANO .....	446
7. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS NO PLANO .....	447
EXERCÍCIOS .....	447
SEQÜÊNCIAS .....	448
1- SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS .....	448
PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA) .....	448
1- INTRODUÇÃO .....	448
2- FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A. ....	449
3- PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) .....	450
EXERCÍCIOS .....	452

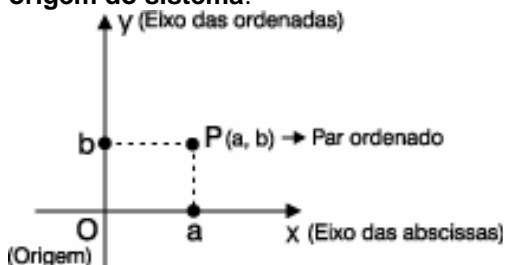
*PROFESSOR:*

## Geometria Analítica – Parte 1

A Geometria Analítica foi concebida por René Descartes. Aliando a Álgebra à Geometria, ela possibilita o estudo das figuras geométricas, associando-as a um sistema de coordenadas. Desse modo, as figuras podem ser representadas de pares ordenados, equações ou inequações.

### 1. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Considere num plano a dois eixos  $x$  e  $y$  perpendiculares em  $O$ . O par de eixos  $x$  ( $Ox$ ), eixo das abscissas, e  $y$  ( $Oy$ ), eixo das ordenadas, chama-se **sistema cartesiano ortogonal**, onde o plano é o **plano cartesiano** e o ponto  $O$  é a **origem do sistema**.



### 2. ESTUDO DO PONTO

#### DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO CARTESIANO

Quando conhecemos as coordenadas de dois pontos  $A$  e  $B$  do plano, sabemos localizar esses pontos num sistema cartesiano ortogonal e, assim, podemos calcular a distância entre  $A$  e  $B$  por meio da seguinte fórmula:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

#### Aplicação

Calcule a distância entre os pontos  $A(9, 4)$  e  $B(1, -2)$ .

#### Solução:

Substituindo na expressão:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{(9 - 1)^2 + (4 - (-2))^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{8^2 + 6^2}$$

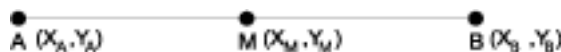
$$d(AB) = \sqrt{64 + 36}$$

$$d(AB) = \sqrt{100}$$

$$d(AB) = 10$$

### 3. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA

Sejam os pontos  $A$ ,  $B$ , e um ponto  $M$ , que divide  $AB$  ao meio, podemos dizer que as coordenadas  $X_M$  e  $Y_M$  do ponto médio  $M$  são obtidos por meio da média aritmética das abscissas e ordenadas, respectivamente, dos pontos dos quais  $M$  é ponto médio.



$$X_M = (X_A + X_B) / 2$$

$$Y_M = (Y_1 + Y_2) / 2$$

#### Aplicação

Calcule as coordenadas do ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{AB}$ , sendo  $A(6, 10)$  e  $B(2, 8)$ .

#### Solução:

$$X_M = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4; \quad Y_M = \frac{10 + 8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

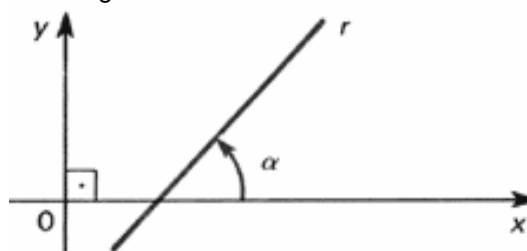
Resposta:  $M(4, 9)$

### 4. ESTUDO DA RETA

#### COEFICIENTE ANGULAR OU DECLIVIDADE DE UMA RETA

Coeficiente angular ( $m$ ) de uma reta  $r$  não perpendicular ao eixo das abscissas é o número real  $m$  que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação  $\alpha$ , ou seja:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$



#### EQUAÇÃO DA RETA

##### Equação Fundamental da Reta

Seja  $G$  um ponto genérico, distinto de  $P$ . O ponto  $G$  pertence a reta  $r$ , se e somente se, o coeficiente angular calculado por meio de  $P$  e  $G$  é igual a  $m$ , ou seja:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

##### Equação geral da reta

Toda reta do plano possui uma equação da forma:

$ax + by + c = 0$ , na qual  $a, b, c$  são constantes e  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos.

**Exemplos:**

a)  $-5x + 3y - 1 = 0$

b)  $9x - 4y - 13 = 0$

**Equação reduzida da reta**

É toda equação de reta onde a variável  $y$  fica isolada. Na equação da reta na forma reduzida podemos identificar o **coeficiente angular** do lado da variável  $x$  e o **coeficiente linear** (termo independente da equação).

**Exemplos:**

a)  $y = 8x - 10$

Coeficiente angular = 8

Coeficiente linear = - 10

b)  $y = -4x + 12$

Coeficiente angular = - 4

Coeficiente linear = 12

**5. CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR E DA EQUAÇÃO DA RETA**

Para calcular o coeficiente angular (não possuindo o valor da inclinação  $\alpha$ ) e achar a equação da reta, utiliza-se uma única fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Importante:** A partir da fórmula acima, podemos determinar o coeficiente angular e a equação da reta.

**Aplicação**

Calcular o coeficiente angular da reta AB; sendo A(-1,4) e B(5,-8).

**PONTOS COLINEARES**

Sejam  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  três pontos do plano cartesiano. A condição necessária e suficiente para que os três pontos estejam juntos na mesma reta (alinhados) é que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinar o valor de  $t$  para que os pontos A (0, t), B (t, - 4), C (1, 2) estejam alinhados.

**Observação:** Para pontos não colineares (vértices de um triângulo, por exemplo), devemos ter a mesma matriz mostrada anteriormente, mas diferente de zero.

**DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA**

Considere uma reta  $r$  de equação geral  $ax + by + c = 0$ , não paralela a nenhum dos eixos, e um ponto  $P(x_0, y_0)$  não pertencente a  $r$ . Passaremos a representar a distância de um ponto  $P$  a uma reta pelo símbolo  $d(p,r)$ . Então, se  $r$  é a reta de equação  $ax + by + c = 0$  e  $P$  é o ponto de coordenadas  $(x_0, y_0)$ :

$$d_{p,r} = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Aplicação**

Calcular a distância do ponto  $P(2, -1)$  à reta  $r$  de equação  $4x - 3y + 9 = 0$ ?

**Solução:**

Pela fórmula prática, temos:

$$d_{p,r} = \frac{|4 - 2 - 3(-1 + 9)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \rightarrow d_{p,r} = \frac{|8 + 3 + 9|}{\sqrt{25}} \rightarrow$$

$$d_{p,r} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} \rightarrow d_{p,r} = \frac{|20|}{5} = 4$$

Portanto,  $d(P,r) = 4$ .

**6. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO CARTESIANO**

Em Geometria Analítica, podemos calcular a área de um triângulo com o auxílio da fórmula:

$$A = \frac{|D|}{2}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Aplicação**

Determine a área do triângulo ABC onde A (0, 1); B (1, 2) e C (- 2, 3).

**Solução:**

Calculando-se primeiramente o valor do determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 2 - 1 + 4 - 0 = 4$$

Aplicando-se a fórmula, temos:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{|4|}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

## 7. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS NO PLANO

### a) RETAS PARALELAS

A condição necessária e suficiente para que duas retas  $r$  e  $s$  não verticais sejam paralelas entre si é que tenham o mesmo coeficiente angular.

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

#### Aplicação

Qual é a posição relativa das retas  $r$  e  $s$ ?

$$r: 2x + 3y - 5 = 0 \text{ e } s: 4x + 6y - 1 = 0$$

**Solução:**

Tomando-se os coeficientes das equações de  $r$  e  $s$ , verificamos que:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= -\frac{2}{3} \\ m_s &= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \text{ como } m_r = m_s, \text{ então } r \parallel s$$

**Observação:** Se, além do mesmo coeficiente angular, duas retas possuem o mesmo coeficiente linear, as retas são coincidentes (paralelas iguais).

### b) RETAS PERPENDICULARES

Se  $m_r$  e  $m_s$  são os coeficientes angulares de duas retas  $r$  e  $s$  perpendiculares, então:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

**Dica:** Os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares são inversos com o sinal trocado.

#### Como se faz?

Dada a reta  $r$  perpendicular a  $s$  e o coeficiente angular de  $r$  igual a  $-7/8$ , determine o coeficiente angular de  $s$ .

**Solução:**

Sendo  $r$  e  $s$  retas perpendiculares, seus coeficientes angulares são inversos com sinal trocado. Então, temos:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= -\frac{7}{8} \\ m_s &= \frac{8}{7} \end{aligned} \right\} \text{ (inverso com o sinal trocado)}$$

### c) INTERSECÇÃO DE RETAS

Em um problema entre duas retas,  $r$  e  $s$ , do mesmo plano, que se intersectam no ponto  $P(a, b)$  com este último pertencente às duas retas, suas coordenadas devem satisfazer, simultaneamente, às equações dessas duas retas.

Logo, para determiná-las, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

## EXERCÍCIOS

**01.** Dados os pontos  $A(4,5)$ ,  $B(1,1)$  e  $C(x,4)$ , o valor de  $x$  para que o triângulo  $ABC$  seja retângulo em  $B$  é:

- a) 3
- b) 2
- c) 0
- d) -3
- e) -2

**02.** As retas de equações  $X = 2$ ,  $Y = X$  e  $X + 2Y = 12$  determinam um triângulo  $T$ . Qual é a área desse triângulo?

- a) 1/5
- b) 2/5
- c) 3/5
- d) 4/5
- e) n.d.a.

**03.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto  $P(2,3)$  e pelo ponto  $O$ , simétrico de  $P$  em relação à origem.

- a)  $3x + 2y = 0$
- b)  $3x - 2y = 0$
- c)  $2x + 3y = 0$
- d)  $2x - 3y = 0$
- e) n.d.a.

**04.** Seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $P(3,2)$  e é perpendicular à reta  $s$ , de equação  $y = -x + 1$ . Qual é a distância entre o ponto  $A(3,0)$  e a reta  $r$ ?

- a) 2
- b) 3
- c)  $\sqrt{2}$
- d) 10
- e) n.d.a.

**05.** Dadas as retas  $r_1: x + 2y - 5 = 0$ ,  $r_2: x - y - 2 = 0$  e  $r_3: x - 2y - 1 = 0$ , podemos afirmar que:

- a) são 2 a 2 paralelas;
- b)  $r_1$  e  $r_3$  são paralelas;
- c)  $r_1$  é perpendicular a  $r_3$ ;
- d)  $r_2$  é perpendicular a  $r_3$ ;
- e) as três retas são concorrentes num mesmo ponto.

**06.** O ponto  $A$ , de intersecção das retas  $r$  e  $s$  de equações  $x - y - 4 = 0$  e  $x + y + 2 = 0$ , respectivamente, e os pontos  $B$  e  $C$ , de intersecção das mesmas retas com o eixo  $Ox$ ,

são os vértices do triângulo ABC. Qual é a área da região triangular?

- a) 2
- b) 3
- c) 7
- d) 9
- e) n.d.a

**07.** As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares e interceptam-se no ponto  $(2; 4)$ . A reta  $s$  passa pelo ponto  $(0; 5)$ . Uma equação da reta  $r$  é:

- a)  $2y + x = 10$
- b)  $y = x + 2$
- c)  $2y - x = 6$
- d)  $2x + y = 8$
- e)  $y = 2x$

**08.** As diagonais de um losango ABCD interceptam-se no ponto  $M(5; 3)$ . Sabendo que  $A(1; 1)$ , a equação da reta suporte da diagonal BD é:

- a)  $2x + y - 13 = 0$
- b)  $x + y - 1 = 0$
- c)  $2x - 3y + 13 = 0$
- d)  $3x + 2y + 1 = 0$
- e)  $x - y - 13 = 0$

**09.** ( FGV-SP ) A reta que passa pela origem e pela intersecção das retas  $2X + Y - 6 = 0$  e  $X - 3Y + 11 = 0$  tem como equação:

- a)  $X = 2X$
- b)  $X = 4X$
- c)  $X = 3X$
- d)  $X = 6X$
- e)  $X = 5X$

**10.** ( UFMG ) Sejam  $A(1,0)$ ,  $B(0,3)$  e  $C(5,4)$  os vértices de um triângulo. Nessas condições, pode-se afirmar que a equação da reta que contém a altura relativa ao lado AB é:

- a)  $X - Y + 1 = 0$
- b)  $X - 3Y + 7$
- c)  $3X$
- +  $Y - 3 = 0$
- d)  $5X - 9Y + 11 = 0$
- e)  $7X - 5Y + 15 = 0$

## Seqüências.

### DEFINIÇÃO

Conjuntos de objetos de qualquer natureza, organizados ou escritos numa ordem bem determinada.

Para representar uma seqüência, escrevemos seus elementos, ou termos, entre parênteses.

É importante destacar que, ao contrário do que ocorre num conjunto, qualquer alteração na ordem dos elementos de uma seqüência altera a própria seqüência.

### Exemplos:

- a) O conjunto (janeiro, fevereiro, março, abril... dezembro) é chamado seqüência ou sucessão dos meses do ano.
- b) O conjunto ordenado  $(0, 1, 2, 3, 4, 5...)$  é chamado seqüência ou sucessão dos números naturais.

### 1- SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

São conjuntos de números reais dispostos numa certa ordem. Uma seqüência numérica pode ser **finita** ou **infinita**.

### Exemplos:

- a)  $(3, 6, 9, 12)$  é uma **seqüência finita**.
- b)  $(5, 10, 15...)$  é uma **seqüência infinita**.

### REPRESENTAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA

A representação matemática de uma sucessão é dada da seguinte forma:  $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, a_n)$ , em que:

- $a_1$  é o primeiro termo;
- $a_2$  é o segundo termo;
- $a_n$  é o enésimo termo.

### Aplicação

Dada a seqüência  $(2, 4, 6, 8, 10)$ , calcular:

- a)  $a_3$  b)  $a_2 + 3a_1$

### Solução:

- a)  $a_3$  é o terceiro termo; logo,  $a_3 = 6$ .
- b)  $a_2 + 3a_1 = 4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$ .

### Progressão aritmética (PA)

#### 1- Introdução

Em nosso dia-a-dia é bastante comum encontrarmos seqüências cujos elementos estão dispostos em uma determinada ordem. Quando estas seqüências apresentam um crescimento ou decrescimento constante aritmeticamente dizemos que são P.A's. As P.A's estão sempre presentes em provas de vestibulares e de alguns concursos. São questões onde a maior dificuldade é interpretação dos dados e a escolha correta da fórmula. Nesta aula veremos algumas dicas de como escolher corretamente a fórmula e se ela é ou não necessária.

Vamos considerar as seqüências numéricas

a) (2, 4, 6, 8, 10, 12).

Veja que a partir do 2º termo a diferença entre cada termo e o seu antecessor, é constante:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 - 2 = 2; & a_3 - a_2 &= 6 - 4 = 2 \\ a_5 - a_4 &= 10 - 8 = 2 & a_6 - a_5 &= 12 - 10 = 2 \end{aligned}$$

b) (2, 2/3, -2/3, -2, -10/30)

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3} \\ a_3 - a_2 &= \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3} \\ a_4 - a_3 &= -2 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \\ a_5 - a_4 &= \frac{-10}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Quando observamos que essas diferenças entre cada termo e o seu antecessor, é constante, damos o nome de **progressão aritmética (P.A.)**. À constante damos o nome de **razão (r)**.

Obs.:  $r=0 \Rightarrow$  P.A. é constante.

$r>0 \Rightarrow$  P.A. é crescente.

$r<0 \Rightarrow$  P.A. é decrescente.

De um modo geral temos:

Chama-se de **progressão aritmética (P.A.)**, toda sucessão de números que, a partir do segundo, a diferença entre cada termo e o seu antecessor é constante. Isto é:

Sucessão:  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_n, \dots)$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

## 2- Fórmula do termo geral de uma P.A.

Vamos considerar a seqüência  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_n)$  de razão  $r$ , podemos escrever:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \dots\dots\dots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Somando membro a membro essas  $n - 1$  igualdades, obtemos:

$$\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \dots + \cancel{a_n} + a_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \dots + \cancel{a_n} + (n-1).r$$

Após a simplificação temos a **fórmula do termo geral de uma P.A.:**

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

Nota Importante:

Quando procuramos uma P.A. com 3, 4 ou 5 termos, podemos utilizar um recurso bastante útil.

- Para 3 termos:  $(x, x+r, x+2r)$  ou  $(x-r, x, x+r)$
- Para 4 termos:  $(x, x+r, x+2r, x+3r)$  ou  $(x-3y, x-y,$

$x+y, x+3y)$ . Onde  $y = \frac{r}{2}$

- Para 5 termos:  $(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$  ou  $(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$

## 1.2 – Interpolação aritmética

Interpolar ou inserir  $k$  meios aritméticos entre dois números  $a_1$  e  $a_n$ , significa obter uma P.A. de  $k+2$  termos, cujos os extremos são  $a_1$  e  $a_n$ .

Pode-se dizer que todo problema que envolve interpolação se resume em calcularmos a razão da P.A.

Ex.: Veja esta P.A.  $(1, \dots, 10)$ , vamos inserir 8 meios aritméticos, logo a P.A. terá  $8+2$  termos, onde:  $a_1 = 1$ ;  $a_n = 10$ ;  $k = 8$  e  $n = k + 2 = 10$  termos.

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow r = \frac{a_n - a_1}{(n-1)} = \frac{10-1}{10-1} = 1$$

a P.A. ficou assim:  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$

## 1.3 – Soma dos $n$ termos de uma P.A. ( $S_n$ )

Vamos considerar a P.A.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$  (1)

Agora vamos escrevê-la de uma outra forma:

$(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1)$  (2)

Vamos representar por  $S_n$  a soma de todos os membros de (1) e também por  $S_n$  a soma de todos os membros de (2), já que são iguais. Somando (1) + (2), vem:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que cada parênteses representa a soma dos extremos da P.A., portanto representa a soma de quaisquer termos equidistantes dos extremos. Então:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ - vezes}}$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad S_n = n \cdot (a_1 + a_n) / 2 \text{ que é a soma dos } n \text{ termos de uma P.A.}$$

### Exercícios

1- (PUC-RS) Para que a progressão aritmética de razão  $r = 5 - 2x$  seja decrescente,  $x$  deve assumir valores no intervalo:

- a)  $]-\infty, -5/2[$
- b)  $]-\infty, 5/2[$
- c)  $] -5/2, 5/2[$
- d)  $] -5/2, +\infty[$
- e)  $]5/2, +\infty[$

2- (CESGRANRIO) A razão da P.A. que se obtém inserindo nove meios aritméticos entre  $1/4$  e  $1/2$ , nessa ordem, é:

- a)  $1/20$
- b)  $1/40$
- c)  $1/60$
- d)  $1/80$
- e)  $1/100$

3- (UNIUFOR-CE) Em um restaurante, os preços de três pratos estão em progressão aritmética de razão R\$12,00. Se o primeiro e o segundo pratos custam juntos R\$ 42,00, então o segundo e o terceiro custam juntos:

- a) R\$ 54,00
- b) R\$ 60,00
- c) R\$ 66,00
- d) R\$ 68,00
- e) R\$ 70,00

4- (UFAM-2002) A soma dos múltiplos de 4 compreendidos entre 78 e 159 é:

- a) 2 835
- b) 2 630
- c) 2 360
- d) 2 941

e) 2 036

5- (MACK-SP) Numa progressão aritmética de 7 termos, o sétimo termo é triplo do primeiro termo e o termo central é 6. A razão da progressão é:

- a) 1
- b)  $1/2$
- c) 2
- d)  $1/3$
- e) 3

6- (OSEC-SP) Existe um triângulo retângulo cujas medidas dos lados são números pares em P.A. de razão 6?

- a) não existe;
- b) existe e os lados medem 14, 20 e 26;
- c) existe e os lados medem 20, 25 e 30;
- d) existe e os lados medem 18, 24 e 30.

7- (UEPB) Devido à sua forma triangular, o refeitório de uma indústria tem 20 mesas na primeira fila, 24 na segunda fila, 28 na terceira fila, e assim sucessivamente. Se dispomos de 800 mesas, o número de fileiras de mesas nesse refeitório será de:

- a) 12
- b) 14
- c) 13
- d) 17
- e) 16

8 (ITA-SP) O valor de  $n$  que torna a sequência  $2 + 3n, -5n, 1 - 4n$  uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

- a)  $[-2, -1]$
- b)  $[-1, 0]$
- c)  $[0, 1]$
- d)  $[1, 2]$
- e)  $[2, 3]$

### 3- PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Um outro tipo de sequência muito comum em nossos desafios são as P.G.'s. Elas tratam de sequências que podem representar crescimento de populações, cálculos de juros compostos, nascimento de novos galhos em uma árvore e tudo que aumente ou diminua segundo uma constante, a razão. Veremos que esta sequência é "mais rápida" que a P.A. tanto no crescimento como no decrescimento, pois sua razão é obtida pela divisão do termo pelo seu antecessor.

Assim sendo Chamamos Progressão Geométrica (P.G.) a uma sequência de números reais, formada por termos, que a partir do  $2^o$ , é igual ao produto do anterior por uma constante  $q$  dada, chamada de **razão** da P.G.

Dada uma sequência  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ , então se ela for uma P.G.  $\Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q$ , com  $n \geq 2$  e  $n \in \mathbb{N}$ , onde:  
 $a_1 - 1^o$  termo

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

### 3.1 – Classificação das P.G.<sup>s</sup>.

1. Crescente:

$$\begin{cases} q > 1 \text{ e seus termos são positivos} \\ \text{ou} \\ 0 < q < 1 \text{ e seus termos são negativos} \end{cases}$$

2. Decrescente:

$$\begin{cases} q > 1 \text{ e seus termos são negativos} \\ \text{ou} \\ 0 < q < 1 \text{ e seus termos são positivos} \end{cases}$$

3. Alternante ou Oscilante: quando  $q < 0$ .

4. Constante: quando  $q = 1$

5. Estacionária ou Singular: quando  $q = 0$

### 3.2 – Fórmula do termo geral

Vamos considerar uma P.G. ( $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ ). Pela definição temos:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Depois de multiplicarmos os dois membros das igualdades e simplificarmos, vem:

$$a_n = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-1 \text{ fatores})}$$

$$a_n =$$

Termo Geral da P.A.

### 3.3 – Interpolação geométrica

Interpolar, Inserir ou Intercalar  $m$  meios geométricos entre dois números reais  $a$  e  $b$  significa obter uma P.G. de extremos  $a$  e  $b$ , com  $m+2$  elementos. Podemos resumir que problemas envolvendo interpolação se reduzem em calcularmos

a razão da P.G. Mais à frente resolveremos alguns problemas envolvendo Interpolação.

### 3.4 – Soma dos termos de uma P.G. finita

Dada a P.G. ( $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ ), de razão  $q \neq 0$  e  $q \neq 1$  e a soma  $S_n$  de seus  $n$  termos pode ser expressa por:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$  (Eq.1) Multiplicando ambos os membros por  $q$ , vem:

$$q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n) \cdot q$$

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_n \cdot q$  (Eq.2) . Encontrando a diferença entre a (Eq.2) e a (Eq.1),

temos:

$$\begin{cases} q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \end{cases}$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$\Rightarrow S_n(q - 1) = a_n \cdot q - a_1 \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \quad \text{ou}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ com } q \neq 1$$

**Obs.:** Se a P.G. for constante, isto é,  $q = 1$  a soma  $S_n$  será:

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$$

### 3.5 – Soma dos termos de uma P.G. infinita

Dada a P.G. infinita: ( $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ ), de razão  $q$  e  $S$  sua soma, devemos analisar 3 casos para calcularmos a soma  $S$ .

1. Se  $a_1 = 0 \Rightarrow S = 0$ , pois  $a_n =$

2. Se  $q < -1$  ou  $q > 1$ , isto é,  $|q| > 1$  e  $a_1 \neq 0$ ,  $S$  tende a  $-\infty$  ou  $+\infty$ . Neste caso é impossível calcular a soma  $S$  dos termos da P.G.

3. Se  $-1 < q < 1$ , isto é,  $|q| < 1$  e  $a_1 \neq 0$ ,  $S$  converge para um valor finito. Assim a partir da Fórmula da soma dos  $n$  termos de uma P.G., vem:

Quando  $n$  tende a  $+\infty$ ,  $q^n$  tende a zero, logo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S = \frac{-a_1}{q - 1} \quad \text{ou}$$



$S = \frac{a_1}{1-q}$  que é a fórmula da soma dos termos de uma P.G. Infinita.

Obs.: S nada mais é do que o limite da Soma dos termos da P.G., quando  $n$  tende para  $\infty$ . É representada desta forma:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

### 3.6 – Produtos dos termos de uma P.G. finita.

Dada a P.G. finita:  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , de razão  $q$  e  $P$  seu produto, que é dado por:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

ou

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando membro a membro, vem:

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \dots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

$P = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$  Esta é a fórmula do produto dos termos de uma P.G. finita.

Podemos também escrever esta fórmula de outra forma, pois:

$$P = \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1}_{n \text{ fatores}} \cdot (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \dots \cdot q^{n-1})$$

Logo:

$$P = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\dots+n-1}, \text{ porém } 1+2+3+\dots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

que é a soma dos termos de uma P.A. Então:

$$P = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ que também representa o produto de uma P.G. finita.}$$

### EXERCÍCIOS

1- A seqüência  $(x+2, x-2, 3x-6, \dots)$  é uma P.G. Calcule seu 4º termo.

Resp: 0 ou -54

2- Determine quantos termos tem a P.G.  $(6, 18, 1458)$ .

Resp: 6

3- (ITA-SP) Dada a P.G. finita  $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{10})$ , onde  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 6$ . Determinar se é correta a igualdade:

$$(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}$$

Resp: Não são iguais.

4- Numa P.G. o 5º termo é igual a 243. Calcule seu 1º termo sabendo que ele é igual a razão. Resp