

# MATEMÁTICA

## ÍNDICE

CAPÍTULO 01: MATRIZES.....	435
<i>PARA REFLETIR!</i> .....	436
<i>EXERCÍCIOS</i> .....	436
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES .....	436
OPERAÇÕES COM MATRIZES .....	436
<i>PARA REFLETIR!</i> .....	437
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO.....	438
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES .....	438
CAPÍTULO 02: DETERMINANTES .....	439
<i>PARA REFLETIR!</i> .....	441
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO.....	441
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES .....	441
CAPÍTULO 03: SISTEMAS LINEARES .....	442

## Capítulo 01: Matrizes

Uma tabela de números dispostos em *linhas e colunas*, como por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & -5 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ é chamada } \mathbf{matriz}.$$

Se essa tabela é formada por  $m$  linhas e por  $n$  colunas, dizemos que a matriz é do tipo  $m$  por  $n$ , e indicamos  $m \times n$ . No exemplo, a matriz  $A$  tem 3 linhas e 4 colunas; então,  $A$  é do tipo  $3 \times 4$ :  $A (3 \times 4)$ .

De modo geral, apresentamos uma matriz *cercando* as linhas e as colunas por parênteses como na matriz  $A$  acima. Podemos também utilizar colchetes ou duplas barras.

### Exemplos

$$1. \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz } (2 \times 3)$$

$$2. \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \text{ é uma matriz de ordem } 2$$

$$3. \quad D = [-1 \quad 0 \quad 3 \quad 5] \text{ é uma matriz } (1 \times 4)$$

### Notação Geral

Normalmente representamos as matrizes por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas por dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$  é representada por:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

ou, abreviadamente,  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , em que  $i$  e  $j$  representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior,  $a_{31}$  é o elemento da 3ª linha e da 1ª coluna.

### Exemplo

Na matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = 6 \\ a_{21} = -5 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

### Tipos de matrizes

Algumas matrizes recebem nomes especiais, devido suas características.

- **Matriz linha**: matriz do tipo  $1 \times n$ , ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz  $A = [5 \quad 8 \quad -2 \quad 3]$ , do tipo  $1 \times 4$ .

- **Matriz coluna**: matriz do tipo  $m \times 1$ , ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , do tipo  $3 \times 1$ .

- **Matriz quadrada**: matriz do tipo  $n \times n$ , ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem  $n$ . Os elementos da forma  $a_{ii}$  constituem a diagonal principal. Os elementos  $a_{ij}$  em que  $i = j + n + 1$  constituem a diagonal secundária. Por exemplo, a matriz  $C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  é do tipo  $2 \times 2$ , isto é, quadrada de ordem 2.

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por  $0_{m \times n}$ . Por exemplo,

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$$B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por  $I_n$ , sendo  $n$  a ordem da matriz. Por exemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para uma matriz identidade

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- **Matriz transposta:** Dada uma matriz  $A$  ( $m \times n$ ), a matriz que se obtém trocando ordenadamente as linhas pelas colunas chama-se **transposta** de  $A$ , e é indicada por  $A^t$  (ou por  $A'$ ). Por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $A = A^t$ . Por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

é simétrica pois temos  $a_{ij} = a_{ji}$ .

- **Matriz anti-simétrica:** Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é anti-simétrica se  $A^t = -A$ . Por exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz oposta:** matriz  $-A$  obtida a partir de  $A$  trocando-se o sinal de todos os elementos de  $A$ . Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

então

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

## Igualdade de Matrizes

Duas matrizes,  $A$  e  $B$ , do mesmo tipo  $m \times n$ , são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = B$  se, e somente se,  $x = 8$ ,  $y = -1$ ,  $z = 5$  e  $t = 3$ .

## Para refletir!

- Qual a relação entre uma matriz  $A$  e sua oposta?
- No que a matriz antisimétrica difere da matriz simétrica?

## Exercícios

1. Escreva a matriz  $A$  ( $3 \times 3$ ) =  $[a_{ij}]$ , onde  $a_{ij} = i + 2j$ . Determine, em seguida,  $A^t$  (a matriz transposta de  $A$ ).

$$\begin{cases} a_{ij} = 2i & \text{se } i = j \\ a_{ij} = j - 10 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

2. Escreva a matriz  $A$  ( $2 \times 2$ ) =  $[a_{ij}]$  onde

3. (ACAFE) Seja  $A = B$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 0 \\ \log_x^{31} & y^2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 10 & y - 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

então os valores de  $x$  e  $y$  serão, respectivamente:

- a) 2 e 3
- b)  $\pm 2$  e  $\pm 3$
- c) 3 e 2
- d) -3 e -2
- e)  $\pm 3$  e  $\pm 2$

## Exercícios Complementares

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y - 1 & 4 \\ x & z & 5 \end{pmatrix}$$

4. Sendo  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  tal que  $a_{ij} = i + j$ , determine  $x$ ,  $y$  e  $z$  tais que.

5. Dada a matriz  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  tal que  $a_{ij} = i^2 + 2j - 5$ , calcule  $a_{12} + a_{31}$ .

6. Calcule a soma dos elementos da 2ª coluna da matriz  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ , em que  $b_{ij} = 2i + j - 1$

## Operações com Matrizes

### Adição

Dadas as matrizes  $A$  e  $B$ , ambas do mesmo tipo ( $m \times n$ ), somar  $A$  com  $B$  é obter a matriz  $A + B$ , do tipo  $m \times n$ , onde cada elemento é a soma dos elementos de mesma posição de  $A$  e  $B$ . Por exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

então

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & 3-7 & 5+3 \\ -1+2 & 4+4 & -2+6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

**Propriedades da Adição**

Sejam **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ( $m \times n$ ), temos as seguintes propriedades para a adição:

- a) comutativa:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- b) associativa:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- c) elemento neutro:  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , sendo **0** a matriz nula  $m \times n$
- d) elemento oposto:  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$

**Subtração**

Para entendermos a subtração de matrizes devemos saber o que é uma matriz oposta. A oposta de uma matriz **M** é a matriz **-M**, cujos elementos são os números opostos de mesma posição de **M**. Por exemplo:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow -\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Com a matriz oposta podemos definir a diferença de matrizes:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

ou seja, para subtrair matrizes, somamos a primeira com a oposta da segunda. Assim para as matrizes **A** e **B** acima, temos:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 2 \\ -3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

**Multiplicação por um Número Real**

Multiplicar um número **k** por uma matriz **A** é obter a matriz **KA**, cujos elementos são os elementos de **A** multiplicados, todos por **k**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

**Propriedades**

Sejam **A** e **B** matrizes do mesmo tipo  $m \times n$  e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{X} \cdot (\mathbf{yA}) = (\mathbf{xy}) \cdot \mathbf{A}$$

- a) associativa:

- a) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{x}\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{B}$$

- b) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{A} + \mathbf{y}\mathbf{A}$$

- c) elemento neutro:  $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ , para  $\mathbf{x} = 1$  ou seja,  $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

**Multiplicação de Matrizes**

Dadas as matrizes  $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$ , define-se como produto de **A** por **B** a matriz  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$  tal que o elemento  $c_{ij}$  é a soma dos produtos da *i*-ésima linha de **A** pelos elementos correspondentes da *j*-ésima coluna de **B**.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik} \cdot b_{jk})$$

**Observação**

Somente existe o produto de uma matriz **A** por outra matriz **B** se o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**. Se existir o produto de **A** por **B**, o tipo da matriz produto é dado pelo número de linhas de **A** e pelo número de colunas de **B**. Pode existir o produto de **A** por **B**, mas não existir o produto de **B** por **A**.

**Propriedades**

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

- a) associativa:
- b) distributiva em relação à adição:  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  ou  $(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$
- c) elemento neutro:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{I}_n$  a matriz identidade de ordem *n*

Geralmente a propriedade comutativa não vale para a multiplicação de matrizes ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ). Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo  $\mathbf{0}_{m \times n}$  uma matriz nula,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}_{m \times n}$  não implica, necessariamente, que  $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m \times n}$  ou  $\mathbf{B} = \mathbf{0}_{m \times n}$ .

**Inversão de Matrizes**

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem *n*, se existir uma matriz  $\mathbf{A}^t$ , de mesma ordem, tal que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ , então  $\mathbf{A}^t$  é matriz inversa de **A**. Representamos a matriz inversa por  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Para refletir!**

Sempre podemos multiplicar matrizes de mesma ordem (iguais) ?

(ACAFE) Sejam as matrizes  $A_{3 \times 2}$ ,  $B_{3 \times 3}$  e  $C_{2 \times 3}$ . A alternativa em que a expressão é possível de ser determinada é:

- a)  $B^2 \cdot (A + C)$
- b)  $(B \cdot A) + C$
- c)  $(C \cdot B) + A$
- d)  $(A \cdot C) + B$
- e)  $A \cdot (B + C)$

## Exercícios de Aplicação

1. Sendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , determine sua inversa,

se existir.  $A = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

2. (ACAFE) Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ , seja  $A^t$

a sua matriz transposta. O produto  $A \cdot A^t$  é a matriz:

- a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
- b)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- e)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

3. (ACAFE) Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Sabendo

que  $A \cdot B = C$ , o valor de  $|x| + |y|$  é:

- a) 15
- b) 1
- c) 57
- d) 9
- e) 39

## Exercícios Complementares

4. Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  e

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , calcule  $X = 2A - 3B^t$ .

5. A matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  é definida, de tal forma que:

$$A_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{se } i > j \\ i+j & \text{se } i = j \\ i+j & \text{se } i < j \end{cases}$$

Determinar a matriz inversa de A.

6. Dada a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule  $M \cdot M^t$ .

7. (ITA-SP) Considere P a matriz inversa da matriz  $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{pmatrix}$ . A soma dos elementos da diagonal principal da matriz P é:

- a) 9/4
- b) 4/9
- c) 4
- d) 5/9
- e) -1/9

8. (UECE) O produto da inversa da matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  pela matriz  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é igual a:

- a)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- b)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- c)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- d)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

## Capítulo 02: Determinantes

Determinante é um número que se associa a uma matriz **quadrada**. De modo geral, um determinante é indicado escrevendo-se os elementos da matriz entre barras ou antecedendo a matriz pelo símbolo **det**.

Assim,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  se, o determinante de A é indicado por:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

O cálculo de um determinante é efetuado através de regras específicas que estudaremos mais adiante. É importante ressaltarmos alguns pontos:

1. Somente às matrizes quadradas é que associamos determinantes.
2. O determinante não representa o valor de uma matriz. Lembre-se, matriz é uma tabela, e não há significado falar em valor de uma tabela.

### Determinante de 1ª Ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem  $M = [a_{11}]$ , o seu determinante é o número real  $a_{11}$ :

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

#### Exemplo

$$M = [5] \Rightarrow \det M = 5 \text{ ou } |5| = 5$$

### Determinante de 2ª Ordem

Dada a matriz  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , de ordem 2, por definição o determinante associado a M, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### Determinante de 3ª Ordem

Para o cálculo de determinantes de ordem 3 podemos utilizar uma regra prática, conhecida como **Regra de Sarrus**, que só se aplica a determinantes de ordem 3. A seguir, explicaremos detalhadamente como utilizar a Regra de Sarrus para calcular o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

#### 1º passo:

Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

#### 2º passo:

Devemos encontrar a soma do produto dos elementos da **diagonal principal** com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal:

multiplicar e somar

#### 3º passo:

Encontramos a soma do produto dos elementos da **diagonal secundária** com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal:

multiplicar e somar

Assim, **subtraindo** o segundo produto do primeiro, podemos escrever o determinante como:

$$D = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

### Menor Complementar

Chamamos de **menor complementar** relativo a um elemento  $a_{ij}$  de uma matriz M, quadrada de ordem  $n > 1$ , o determinante  $MG_{ij}$ , de ordem  $n - 1$ , associado à matriz obtida de M quando suprimimos a linha e a coluna que passam por  $a_{ij}$ . Por exemplo, dada a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

de ordem 2, para determinar o menor complementar relativo ao elemento  $a_{11}(MG_{11})$ , eliminamos a linha 1 e a coluna 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

De modo análogo, para obtermos o menor complementar relativo ao elemento  $a_{12}$ , eliminamos a linha 1 e a coluna 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

Para um determinante de ordem 3, o processo de obtenção do menor complementar é o mesmo utilizado anteriormente, por exemplo, sendo

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

de ordem 3, temos:

$$MC_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

## Cofator

Chama-se de cofator de um elemento  $a_{ij}$  de uma matriz quadrada o número  $A_{ij}$  tal que  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot MC_{ij}$

## Exemplo

$$\text{Considerando } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

calcularemos o cofator  $A_{23}$ . Temos que  $i=2$  e  $j=3$ , logo:  $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot MC_{23}$ . Devemos calcular  $MC_{23}$ .

$$MC_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Assim  $A_{23} = (-1) \cdot (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$ .

## Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada  $M = [a_{ij}]_{m \times n}$  ( $m \geq 2$ ) pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz  $M$  pelos respectivos cofatores.

Desta forma, fixando  $j \in N$ , tal que  $1 \leq j \leq m$ , temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij}$$

em que  $\sum_{i=1}^m$  é o somatório de todos os termos de índice  $i$ , variando de 1 até  $m$ ,  $m \in N$ .

## Exemplo:

Calcule o determinante a seguir utilizando o Teorema de Laplace:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace na coluna 1, temos:

$$D = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 2(+1)(-4) + (-2)(-1)38 + 0 = -8 + 76 = 68$$

## Observação

Se calcularmos o determinante utilizando a Regra de Sarrus, obteremos o mesmo número real.

## Propriedades dos determinantes

**P1)** Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

**P2)** Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

**P3)** Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

**P4)** Se os elementos de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

**P5) Teorema de Jacobi:** o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila, uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

**P6)** O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

**P7)** Multiplicando-se por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

**P8)** Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

**P9)** Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

**P10)** Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicados por  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

**P11)** Para A e B matrizes quadradas de mesma ordem n,  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ . Como  $A \cdot A^{-1}$ ,  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .

**P12)** Se  $k \in \mathbb{R}$ , então  $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$ .

**Para refletir!**

- Podemos associar um determinante apenas a matrizes quadradas?

## Exercícios de Aplicação

1. (ACAFE) O valor do determinante  $\begin{pmatrix} \log_2 8 & \log 10 \\ 4^{-1/2} & 3^{1^2} \end{pmatrix}$  é:

- a) 0
- b) 4
- c) 7
- d) 17/2
- e) 53/2

2. (UDESC) Sejam as matrizes quadradas de ordem 2,  $A = (a_{ij})$  com  $a_{ij} = i^2 - j^2$  e  $B = (b_{ij})$  com  $b_{ij} = a_{ij} - 3$  se  $i > j$ , e  $b_{ij} = a_{ij} + 3$  se  $i \leq j$ .

Determine:

- a) a matriz A
- b) a matriz B
- c) a matriz  $A \times B$
- d) o determinante da matriz  $A \times B$

3. (UDESC) A partir da matriz  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ , onde  $a_{ij} = \begin{cases} -1 \rightarrow se \rightarrow i \geq j \\ i + j \rightarrow se \rightarrow i < j \end{cases}$ , calcular o determinante do produto da matriz A pela sua transposta, ou seja:  $\det(A \times A^t)$ , onde  $A^t$  é a matriz transposta de A.

## Exercícios Complementares

4. (UNIFENAS) Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  o determinante de sua matriz inversa  $A^{-1}$  é:

- a) -2
- b) -4
- c) 1/2
- d) 4
- e) -1/4

5. (MACK) A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e  $B = K \cdot A$ . Sabe-se que  $\det A = 1,5$  e  $\det B = 96$ . Então:

- a)  $k = 64$
- b)  $k = 96$
- c)  $k = 1/4$
- d)  $k = 3/2$
- e)  $k = 4$

6. (PUC) O cofator do elemento  $a_{23}$  da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

- a) 2
- b) 1
- c) -1
- d) -2
- e) 3

7. (UDESC) Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, apresentada abaixo, cujo determinante é igual a 0,75.

$$A = \begin{pmatrix} \sin x & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & \sin x & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando  $\pi/2 < x < \pi$ , determinar o valor de  $\tan x$ .





- a) Coloca-se como primeira equação do sistema uma equação com coeficiente da primeira incógnita igual a 1.  
 b) Elimina-se a primeira incógnita de todas as equações, a partir da segunda equação.  
 c) Deixa-se de lado a primeira equação e repetem-se os passos anteriores para as demais equações.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ -y - 2z = -1 \\ 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ -y - 3z = 1 \\ 8z = 8 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 2, -1)\}$$

Se durante o escalonamento surgir uma equação do tipo:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$$

- a) Se  $b = 0$ : eliminamos a equação e continuamos o escalonamento.  
 b) Se  $b \neq 0$ : conclui-se de imediato que o sistema é impossível.

Classificação do sistema pelo método do escalonamento.

Seja um sistema escalonado de  $m$  equações e  $n$  incógnitas.

$m = n$ : sistema possível determinado.

Se durante o escalonamento surgir uma equação do tipo:

I.  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$ , com  $b \neq 0$ , então o sistema é impossível.

II.  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$  e não ocorrer o caso anterior, então o sistema é possível e indeterminado.

**5. Sistemas Lineares com Parâmetros**

São sistemas condicionados a parâmetros inseridos em seus coeficientes.

A discussão pode ser feita por escalonamento.

**Aplicação**

Discutir o sistema em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

$$\begin{cases} x + y = b \\ 2x + ay = 6 \end{cases}$$

Calculamos o determinante (D) do sistema.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2$$

$$D \neq 0 \therefore a - 2 \neq 0$$

$$a \neq 2$$

Sistema possível determinado

$$D \neq 0 \therefore a - 2 \neq 0$$

$$a \neq 2$$

$$\begin{cases} x + y = b \\ 2x + 2y = 6 \\ \begin{cases} x + y = b \\ 0 = 6 - 2b \end{cases} \end{cases}$$

Se  $b = 3$ , então o sistema é possível indeterminado.

Se  $b \neq 3$ , então o sistema é impossível.

**6. PARA RESOLVER**

01. (PUC–Pelotas–RS) O sistema

$$\text{linear} \begin{cases} x - y + -3z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \\ x - 5y + 15z = 0 \end{cases}$$

- a) Admite infinitas soluções.  
 b) Admite apenas duas soluções.  
 c) Não admite solução.  
 d) Admite solução única.  
 e) Admite apenas a solução trivial.

02. (Fuvest–SP)  $\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x - 3y = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$  Então  $x + y + z$

é igual a:

- a) -2  
 b) -1  
 c) 0  
 d) 1  
 e) 2

03. (F. Objetivo–AM) O sistema  $\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases}$  nas

incógnitas  $x$  e  $y$  tem infinitas soluções. O valor de  $a$  e  $b$  é:

- a) 6  
 b) 2  
 c) 8  
 d) 16  
 e) 12

04. (UF–RS) O sistema de

$$\text{equações} \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = a \end{cases} \text{ tem solução se, e}$$

só se, o valor de  $a$  é:

- a) 6
- b) 5
- c) 4
- d) 2
- e) zero

05. (Mackenzie–SP) A soma dos valores de  $m$ ,

para que o sistema 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx - 2y + 4z = 5 \\ m^2x + 4y + 16z = 0 \end{cases}$$
 não

admita uma única solução, é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

06. (Fuvest–SP) Sabendo que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números reais e  $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$ , então  $x + y + z$  é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

07. (Fafi–MG) Se a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = -15 \\ 3x + 6y - 7z = 59 \end{cases}$$

de  $xy + z$  é:

- a) primo;
- b) par;
- c) negativo;
- d) irracional.

08. (Unifesp–SP) A solução do sistema de

equações lineares 
$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ x - 2z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$
 é:

- a)  $x = -5$ ,  $y = -2$  e  $z = -1$
- b)  $x = -5$ ,  $y = -2$  e  $z = 1$
- c)  $x = -5$ ,  $y = 2$  e  $z = 1$
- d)  $x = 5$ ,  $y = 2$  e  $z = -1$
- e)  $x = 5$ ,  $y = 2$  e  $z = 1$

09. O sistema linear 
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$
 é:

- a) possível e indeterminado;
- b) impossível;
- c) possível e determinado;
- d) homogêneo;
- e) n.d.a.

10. (FEI–SP) Se as retas de

equações: 
$$\begin{cases} x + 2y - 2a = 0 \\ ax - y - 3 = 0 \\ 2x - 2y - a = 0 \end{cases}$$
 são concorrentes

em um mesmo ponto, então:

- a)  $a = 4$  ou  $a = 2/3$
- b)  $a = -3/2$  ou  $a = 2/3$
- c)  $a = 2$  ou  $a = -3/2$
- d)  $a = 1$  ou  $a = 4$
- e)  $a = 0$  ou  $a = 5$